EPFL – Automne 2024	D. Strütt
Analyse III – GC IN	**Exercices**
Série 2	26 septembre 2024

Remarque.
Les exercices avec références entre parenthèses proviennent du livre *Analyse Avancée pour Ingénieurs*, par B. Dacorogna et C. Tanteri. Les corrigés sont à consulter dans le livre, même si parfois certaines étapes sont développées dans le corrigé publié sur moodle.

Exercice 1 (ex 1.1, p. 7, corrigé p. 8).
Soit
$$F(x,y,z) = \Big(y^2 \sin(xz), e^y \cos(x^2+z), \ln(2+\cos(xy))\Big) = (F_1, F_2, F_3).$$
Calculer :

(*i*) $\operatorname{grad} F_1$, $\operatorname{grad} F_2$, $\operatorname{grad} F_3$

(*ii*) $\operatorname{div} F$

(*iii*) $\operatorname{rot} F$.

Exercice 2 (ex 1.2, p. 7, corrigé p. 8).
Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est $C^1(\mathbb{R}^3)$ et $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est $C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$, alors parmi les expressions suivantes lesquelles ont un sens ?

(*i*) $\operatorname{grad} f$ (*iv*) $\operatorname{div} f$ (*vii*) $\operatorname{rot} f$

(*ii*) $f \operatorname{grad} f$ (*v*) $\operatorname{div}(fF)$ (*viii*) $f \operatorname{rot} F$

(*iii*) $F \cdot \operatorname{grad} f$ (*vi*) $\operatorname{rot}(fF)$ (*ix*) $\operatorname{rot}\operatorname{div} F$

Exercice 3 (exemple 1.3, p. 6).
Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, et r tels que $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}$. Soit f le champ scalaire défini par $f(x) = 1/r$. Calculer Δf.

Exercice 4 (ex 1.6&1.7, p. 8, corrigé p. 11).
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert. Montrer que :

1. Si $f \in C^1(\Omega)$ et $g \in C^2(\Omega)$, alors :
$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f\Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$$
2. Si $f, g \in C^1(\Omega)$, alors :
$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$
3. Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ alors :
$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f$$
4. Si $F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors :
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad}\operatorname{div} F,$$
où pour $F = (F_1, F_2, F_3)$ on note $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.
5. Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, alors :
$$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F$$

Exercice 5 (ex 1.4, p. 7, corrigé p. 9).
Soit $f \in C^2(\Omega)$, où
$$\Omega = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y > 0\Big\}.$$

(i) Montrer que, si

$$g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(x,y),$$

alors

$$\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\theta)}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \Delta f(x,y).$$

(ii) Calculer Δf pour

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} + \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)^2.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i)

$$\begin{aligned}\nabla F_1 &= (y^2 z\cos(xz), 2y\sin(xz), xy^2\cos(xz))\\ \nabla F_2 &= (-2xe^y\sin(x^2+z), e^y\cos(x^2+z), -e^y\sin(x^2+z))\\ \nabla F_3 &= \left(-\frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, -\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, 0\right)\end{aligned}$$

(ii) $\operatorname{div} F = y^2 z\cos(xz) + e^y\cos(x^2 z)$

(iii)

$$\operatorname{rot} F = \left(-\frac{x\sin(xy)}{2+\cos(xy)} + e^y\sin(x^2+z), xy^2\cos(xz) + \frac{y\sin(xy)}{2+\cos(xy)}, -2(xe^y\sin(x^2+z) + y\sin(xz))\right)$$

Exercice 3 $\frac{3-n}{r^3}$

Exercice 5 (ii) $\frac{2+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$